Klasse B12T5

3. Extemporale aus der Mathematik am 17.03.2011 Name: ....

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot e^{-1,5x^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1. Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f, und bestimmen Sie die Nullstelle. [3]
2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$. [4]
3. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte. [9]
   (mögl. Zwerg.: $f''(x) = (18x^3 - 18x) \cdot e^{-1,5x^2}$
4. Begründen Sie, warum die Ableitungsfunktion $f'(x)$ im Intervall [0;1] genau eine Nullstelle besitzt, ohne diese Nullstelle explizit zu berechnen. [4]
5. Der Graph von f besitzt einen Wendepunkt W_1 mit $x_{W1} > 0$ und zugehöriger Tangente t_1 im ersten Quadranten. [5]
   Berechnen Sie die (exakte) Gleichung von t_1 und zeichnen Sie t_1 in das vorhandene Koordinatensystem.
   Zeichnen Sie ohne weitere Berechnung den Graphen der Funktion f in das vorhandene Koordinatensystem ein.

1) $f(-x) = 2 \cdot (-x) \cdot e^{-1.5(-x)^2} = -2x e^{-1.5x^2} = -f(x) \Rightarrow$ PSym z. Urspr.

(3) $f(x) = 2x e^{-1.5x^2} = 0 \Rightarrow x_N = 0$

2) $f(x) \xrightarrow{x \to +\infty}$ "$\infty \cdot 0$" also $f(x) = \frac{2x}{e^{1.5x^2}} \to$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

(4) L.H: $\frac{2}{3x e^{1.5x}} \to$ "$\frac{2}{\infty \cdot \infty}$" $\to$ "$\frac{2}{\infty}$" $\to 0$ für $x \to +\infty$

$x \to -\infty$: $f(x) \to 0$ wg. Sym.

3. $f'(x) = 2e^{-1.5x^2} + 2x \cdot (-3x) e^{-1.5x^2} = (2 - 6x^2) \cdot e^{-1.5x^2}$

(9) $f''(x) = -12x e^{-1.5x^2} + (2 - 6x^2) \cdot (-3x) e^{-1.5x^2} = (-12x - 6x + 18x^3) e^{-1.5x^2}$

$= (18x^3 - 18x) e^{-1.5x^2} = 18x(x^2 - 1) e^{-1.5x} = 0$ (3)

$x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ (1) $f(0) = 0$ (s.o.) $\Rightarrow W_2(0/0)$ (2)

VZ f'': − 0 + 0 − 0 + (3) $f(1) = 2e^{-1.5} \approx 0,45 \Rightarrow W_3(1/2e^{-1.5})$

G_f re WP₁ likr WP rekr. WP likr $f(-1) = -f(1) \Rightarrow W_1(-1/-2e^{-1.5})$

4. $f'(0) = 2e^0 = 2 > 0$, wg VZW u. Stetigkeit:
(4) $f'(1) = -4e^{-1.5} < 0$ } mind. 1 NST
in $[0;1]$: $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f'$ smf
$\Rightarrow$ genau 1 NST von f'

5. $t = y_w - m x_w =$
(5) $= 2e^{-1.5} - (-4e^{-1.5}) \cdot 1 = 6e^{-1.5} \approx 1,34$
$t_1(x) = -4e^{-1.5} x + 6e^{-1.5}$

Zu Aufgabe 5